构造几何图形巧证不等式

■杨芳燕

一些不等式的证明，看似简单，但却往往无从下手，很难找到切入点。这时我们不妨变换一下思维角度，从不等式的结构和特点出发，在已学过的知识的基础上进行广泛的联想，构造一个与不等式相关的几何模型，实现问题的转化，从而使不等式得到证明。下面通过举例加以说明。

例1 已知：正数 a、b、c、d、x、y、z、t 满足：$a+x=b+y=c+z=d+t=k$。求证：$ay+bz+ct+dx<2k^2$。

分析：待证式可变形为：$\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bz+\frac{1}{2}ct+\frac{1}{2}dx<k^2$。由 $\frac{1}{2}ay$、$\frac{1}{2}bz$、$\frac{1}{2}ct$、$\frac{1}{2}dx$、k^2 的形式，可联想到三角形与正方形的面积公式，故可构造边长为 k 的正方形与面积为 $\frac{1}{2}ay$、$\frac{1}{2}bz$、$\frac{1}{2}ct$、$\frac{1}{2}dx$ 的三角形。

证明：构造如图1所示的正方形，则有 $S_{正方形}=k^2$。

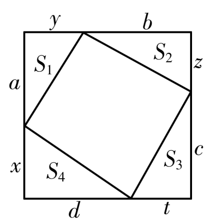

图1

因为 $S_1+S_2+S_3+S_4<S_{正方形}$，所以 $\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bz+\frac{1}{2}ct+\frac{1}{2}dx<k^2$。

所以 $ay+bz+ct+dx<2k^2$。

例2 已知：a、b、c、d 为正数，且 $a^2+b^2=2c^2+2d^2$。求证：$a+b>2c$，$a+b>2d$。

分析：将待证式变形为 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b>c$，$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b>d$，故可以构造两个三角形，其边长分别为 $\frac{1}{2}a$、$\frac{1}{2}b$、c 和 $\frac{1}{2}a$、$\frac{1}{2}b$、d，于是可用三角形三边的关系得证。

证明：构造如图2所示的平行四边形 $ABCD$，使 $AB=CD=c$，$BC=AD=d$。则 $AC=a$，$BD=b$，所以 $AO=\frac{1}{2}a$，$BO=\frac{1}{2}b$。

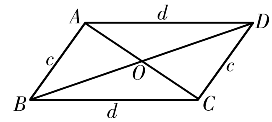

图2

由三角形三边的关系得：$AO+BO>AB$。即 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b>c$，所以 $a+b>2c$。同理得：$a+b>2d$。

例3 设 c 是直角三角形的斜边长，a、b 是两直角边，求证：$a+b\leqslant\sqrt{2}c$。

分析：由题意知：$a^2+b^2=c^2$，由待证式左边为 $a+b$，可以联想到构造边长为 $a+b$ 的直角三角形，其斜边为 $\sqrt{2}(a+b)$。

证明：如图3，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，分别延长 AB、AD 至 E、F，使 $BE=DF=b$，连接 CE、CF、EF。

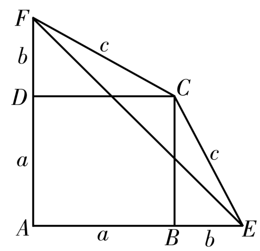

图3

则有 $CE=CF=c$，$EF=\sqrt{2}(a+b)$，因为 $EF\leqslant CE+CF$，所以 $\sqrt{2}(a+b)\leqslant 2c$，所以 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$。

或者联想到等腰直角三角形的斜边等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍，所以可以构造与等腰直角三角形有关的图形来证明。

如图4，直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=90°$，$AD=AE=a$，$EB=BC=b$，则有 $ED=\sqrt{2}a$，$EC=\sqrt{2}b$，$\angle DEC=90°$，所以 $DC\leqslant\sqrt{2}c$。由图知 $AB\leqslant DC$，所以 $a+b\leqslant\sqrt{2}c$。

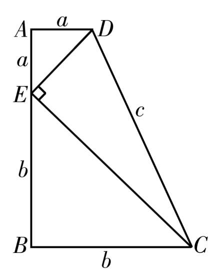

图4

（下转第30页）

观察条件不等式和目标函数，会发现如果将 $a^2=t$ 等效为一个新的参量而不改变其限定的范围，则条件不等式和目标函数就都转换为线性规划的形式，从而使问题得到解决。

令 $a^2=t$，则原问题就转换为：已知 $t-4b>0$，$b>0$，$4>t>0$ 条件下，$t-2b$ 的范围。由常规线性规划的方法可以得到：$t-2b\in(0,4)$，如图2。

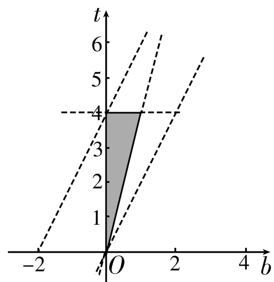

图2

例3 已知 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，求 $\frac{a}{b}$ 的范围。

解：由题目条件我们可以挖掘出 $c>0$ 的隐含条件，我们将已知不等式的两边同时除以 c，即将三个参变量的不等式转换成两个参变量的不等式。即 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，(1)，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，(2)。令 $\frac{b}{c}=x$，$\frac{a}{c}=y$。(1)(2)可以转化成如下形式：$5-3y\leqslant x\leqslant 4-y$，(3)，$\ln x\geqslant y$，(4)。

通过除以 c 这个代数上的等效处理，将线性规划不能处理的(1)(2)问题转化为常见的线性规划问题(3)(4)。借用线性规划的思想：$\frac{a}{b}=\frac{y}{x}$ 的范围可以转化为在不等式约束下的点与原点所连直线的斜率的范围。由经典解线性规划的方法可以得到 $\frac{a}{b}\in\left(\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right)$。

由以上三个例题的求解过程，我们可以意识到：简单的线性规划蕴含着深刻的数形结合的思想，是我们处理复杂不等式问题的利器，我们要惯于和善于利用这种方法，为此我们要将多参变量减元，灵活地将参变量进行化简变换，使之能够利用线性规划，或类似线性规划来解题。

作者单位：四川省成都市高新区电子科技大学附属中学高二(1)班

(上接第8页)

例4 正数 a、b、c、x、y、z 满足 $a+x=b+y=x+z=k$，求证：$ay+bz+cx<k^2$。

分析：本题由 $a+x=b+y=c+z=k$ 联想到构造三角形 $AB=BC=CA=k$，如图5所示，再由面积之间的关系可以证明。

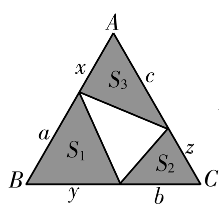

图5

证明：如图5，在边长为 k 的等边三角形 ABC 中，令 $AB=a+x$，$BC=y+b$，$CA=c+z$。

因为 $S_1+S_2+S_3<S_{\triangle ABC}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{4}ay+\frac{\sqrt{3}}{4}bz+\frac{\sqrt{3}}{4}cx<\frac{\sqrt{3}}{4}k^2$，所以 $ay+bz+cx<k^2$。

例5 设 a,b,c 都是正实数，求证：

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-b|。$$

证明：$a=b$ 时，显然成立，由于 a,b 的地位相同，不妨假设 $a>b$，这时要证的不等式转化为 $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\leqslant a-b$。

如图6作 $\triangle ABC$，$CA=CB$，CD 为底边 AB 上的高，E 为 CD 上的一点，使得 $CD=a$，$ED=b$，$AD=DB=c$，由勾股定理得：$CA=CB=\sqrt{a^2+c^2}$，$EB=\sqrt{b^2+c^2}$。又 $CE=CD-ED=a-b$。在 $\triangle CBE$ 中，$CB-EB<CE$，即 $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}<a-b$。综上，命题得证。

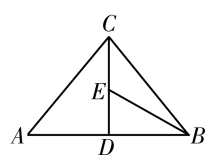

图6

应用：已知 $0<a<1$，$0<b<1$，求证：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geqslant 2\sqrt{2}。$$

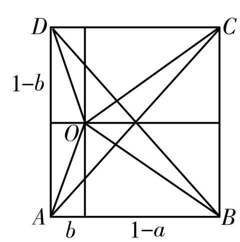

图7

提示：构造图7，不难得证。

作者单位：江苏苏州市苏州湾实验初级中学