直线参数方程的理解及应用

■缪爱平

直线的参数方程既是解析几何的重要内容，也是每年高考数学的重要考点。它的应用非常广泛，可以比较快捷地解决解析几何中的定点问题、弦长问题、位置问题、最值问题、范围问题、存在性问题、轨迹问题等。

一、直线参数方程

在平面直角坐标系中，经过点 $M_0(x_0, y_0)$，倾斜角为 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 的直线 l 的参数方程为① $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）。

我们通常把直线参数方程的这种形式称之为直线参数方程的标准式。设 $M(x,y)$ 为直线 l 上任意一点，则 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)=t(\cos\alpha,\sin\alpha)=t\boldsymbol{e}$②，其中 $\boldsymbol{e}$ 是直线 l 的单位方向向量。由②得到 $|\overrightarrow{M_0M}|=|t|$。因此，直线参数方程参数 t 的几何意义为直线上动点 M 到定点 M_0 的距离。当 $0\leqslant\alpha<\pi$ 时，直线 l 的单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的方向总是向上。所以，若 $t>0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 方向向上；若 $t<0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向向下；若 $t=0$，则点 M 与 M_0 重合。

二、直线参数方程参数 t 的几何意义的应用

例题 在直角坐标系 xOy 中，直线 l 过点 $P(1,0)$，且倾斜角为 α，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$。

(1)求圆 C 的直角坐标系方程及直线 l 的参数方程。

(2)设直线 l 与圆 C 有两个交点 A,B，求证：$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{2\sqrt{\cos^2\alpha+3}}{3}$。

解：(1)因为直线 l 过定点 $P(1,0)$，且倾斜角为 α，所以它的参数方程是 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）。

因为 $\rho=4\cos\theta$，所以 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，得圆 C 的直角坐标系方程为 $x^2+y^2-4x=0$，即 $(x-2)^2+y^2=4$。

证明：(2)把直线的参数方程 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），代入圆 C 的方程 $x^2+y^2-4x=0$，化简、整理得 $t^2-2t\cos\alpha-3=0$，因为直线与圆有两个交点 A,B，所以 $\Delta=4\cos^2\alpha+12>0$，上述方程有两个不同的实数根 t_1,t_2 且 $t_1+t_2=2\cos\alpha$，$t_1t_2=-3$。因为 $t_1t_2=-3<0$，所以 t_1,t_2 异号，即 A 与 B 在点 P 的两侧。因此，$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA||PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{3}=\frac{\sqrt{4\cos^2\alpha+12}}{3}=\frac{2\sqrt{\cos^2\alpha+3}}{3}$。

三、应用直线参数方程参数 t 几何意义解题的条件

要用直线参数方程解决数学问题，必须注意以下几点：

首先，直线过我们需要的定点。

其次，所有其他的点都在过该定点的直线上。满足这两个条件，我们可以考虑用直线的参数方程来解题。

最后，直线的参数方程必须是标准式，即 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），也就是两个方程中的系数是直线倾斜角的余弦和正弦。

如果直线的参数方程是 $\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+bt\end{cases}$（$t$ 为参数），且 $a^2+b^2\neq1$，则这个参数方程不是直线参数方程的标准式方程，参数 t 没有前面讲的几何意义，若要用参数几何意义解题，必须先把非标准式参数方程转化为标准式的参数方程。

作者单位：江苏省大港中学