由一道试题谈函数模型在高中数学解题中的应用

——浅谈“对勾函数”的性质

■李 帅

“函数是现代数学最基本的概念……帮助学生建立完整的函数概念，能用代数运算和函数图像揭示函数的主要性质，在现实问题中能利用函数构建模型，解决问题。”进而挖掘出高中数学中隐藏的一类函数——“对勾函数”的性质。

一、引例

已知函数 $f(x)=\log_3\left(\frac{x^2+ax+b}{x}\right)$，$x\in(0,+\infty)$，是否存在实数 a,b，使 $f(x)$ 同时满足下列条件：(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，在 $[1,+\infty)$ 上是增函数；(2) $f(x)$ 的最小值是1。若存在，求出 a,b 的值；若不存在，试说明理由。

反思1：详解略。本解法利用函数单调性的定义，转化为内层函数恒成立问题，体现了转化与化归的解题思想，解题过程相对繁琐，运算量较大。

下面是笔者的另一种解题思路，其解析过程如下：假设存在实数 a,b 满足条件，令 $u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $y=\log_3 u$，显然 $y=\log_3 u$ 是增函数，故函数 $f(x)=\log_3\left(\frac{x^2+ax+b}{x}\right)$，$x\in(0,+\infty)$，与函数 $u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，具有相同的单调区间。

下面分析函数 $u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}=x+\frac{b}{x}+a$，$x\in(0,+\infty)$ 的单调性：①当 $b<0$ 时，$u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}=x+\frac{b}{x}+a$，$x\in(0,+\infty)$ 为增函数，与条件①不符合；②当 $b=0$ 时，$u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}=x+\frac{b}{x}+a$，$x\in(0,+\infty)$ 为增函数，与条件①不符合；③当 $b>0$ 时，$u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}=x+\frac{b}{x}+a$，$x\in(0,+\infty)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，此时 $u(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}=x+\frac{b}{x}+a\geqslant 2\sqrt{b}+a$，$x\in(0,+\infty)$，当且仅当 $x=\sqrt{b}$ 时等号成立。

故 $\begin{cases}2\sqrt{b}+a>0,\\ \sqrt{b}=1\text{ 且 }\log_3(2\sqrt{b}+a)=1,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=1,\\ b=1。\end{cases}$

反思2：此种解题方法，充分考虑到符合函数的单调性在解题中的应用，把函数分解为较为简单的函数，从而使得解题过程明了简洁，思路清晰，更加符合逻辑推理、数学抽象的核心素养，也利于学生接受。

二、归类总结

1.定义：一般地，形如 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$，$(a\neq0,b\neq0)$ 的函数叫做“对勾函数”。

2.性质：以 $a>0,b>0$ 为例，着重从函数的定义域、单调性、值域、奇偶性来研究函数的性质。

①定义域：显然函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq0\}$。②函数单调性：利用导函数研究如下：解：$f'(x)=\left(ax+\frac{b}{x}\right)'=a-\frac{b}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得：$x<-\sqrt{\frac{b}{a}}$ 或 $x>\sqrt{\frac{b}{a}}$，故函数的单调增区间为 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$；单调减区间为 $\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},0\right)$，$\left(0,\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$。③值域：由上面单调性知，函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}$，$(a>0,b>0)$ 值域为 $(-\infty,-2\sqrt{ab})\cup(2\sqrt{ab},+\infty)$。④奇偶性：函数定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq0\}$ 且 $f(-x)=a(-x)+\frac{b}{-x}=-\left(ax+\frac{b}{x}\right)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数。

作者单位：河南省息县一高