导数在求函数极值、最值问题中的应用

■赵学慧

导数在高中数学中十分重要，对于函数等方面问题的求解提供了一种新的解决途径，利用导数来对函数最值、极值进行求解比以往解题方法更为便捷，这不仅有利于学生提高函数问题求解速度，而且有利于学生对于函数知识内容进一步地掌握。

一、函数极值概述

1.函数极值定义和判断方法

函数极值包括函数极大值和函数极小值，函数极大值是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，如果当 x_0 附近所有的点都满足 $f(x)<f(x_0)$，那么 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 的极大值点，相反当 $f(x)>f(x_0)$ 时，那么此时的 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 的极小值点。当 x_0 满足 $f'(x_0)=0$，当 x_0 两侧函数的导数值正负号不相同时，x_0 为极值点，如果两侧呈现左正右负规律时，x_0 为极大值点；如果两侧呈现左负右正规律时，x_0 为极小值点。

2.求可导函数 $f(x)$ 极值的步骤

第一步，确定函数定义区间，对函数进行求导。第二步，求出 $f'(x_0)=0$ 的根。第三步，根据函数导数为0的点来将函数定义域顺次划分为若干小开区间，并整理成表格，针对导数方程根两端的值符号进行判断，左正右负为极大值，左负右正为极小值，如果左右不改变符号，那么该函数在这个根处没有极值。

3.函数极值注意事项

通过极值定义可得，取得极值的点叫做极值点，极值点是自变量的值，而极值是针对函数而言的数值，在这方面要注意以下几点：

(1)极值是一个局部概念。通过定义可得出极值只是针对函数某个区间内一点与这个点附近的函数值做比较所得到的最大值和最小值，但并不能说明这点所对应的函数值在函数的整个定义域内就是最大的或者最小的；

(2)函数极值并不是唯一的，一个函数在一个区间内可能会存在没有极值或者有多个极值情况；

(3)极大值与极小值之间没有办法进行大小判断，一个函数的极大值有可能小于函数的极小值；

(4)函数极值点一定处于区间内部，不会是区间端点，而使函数得到最大值或者最小值的带你有可能处于区间内部也有可能是端点；

(5)可导函数极值点导数为0，但导数为0的点不一定是极值点；

(6)函数在一点可以有极值，但该点并不一定可导。

二、函数最值概述

1.函数最值定义和求解步骤

函数最值定义为在一个闭区间 $[a,b]$ 上图像连续不断的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值。如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，在闭区间 $[a,b]$ 上图像连续不断，那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最值求解步骤为：一是求 $f(x)$ 在 (a,b) 内极值；二是把 $f(x)$ 各极值与 $f(a)$、$f(b)$ 做比较，得出其中最值，最大的为最大值，最小的为最小值。

2.函数最值问题注意事项

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上图像连续不断的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最值；

(2)在开区间 (a,b) 内图像连续不断的函数 $f(x)$ 可能会没有最值，如函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续不断的，但就没有最值；

(3)函数最值要比较定义域内所有函数值才能够得到，而函数极值只要比较附近函数值就可以得到；

(4)函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上图像连续不断是存在最值的充分不必要条件，有部分函数存在最值但图像并不连续；

(5)函数最值只能有一个，但是函数极值可能没有或者存在多个；

(6)若一个函数在定义区间内有且只有一个极值，那这个值必定为最值。

作者单位：广东省韶关乐昌市城关中学

?1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net