三角函数与平面向量“喜结连理”

■袁海杰

高中数学人教A版数学4中涉及三角函数与平面向量知识，这一部分理解起来并不费力。下面就为大家收集部分经典习题，希望对同学们的学习能有所帮助。

题型一、三角函数的简单计算

例1 （2018·石家庄模拟）在$(0,2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围为____。

解析：如图1所示，找出在$(0,2\pi)$内，使$\sin x=\cos x$的x值，$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。根据三角函数线的变化规律标出满足题中条件的角$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$。

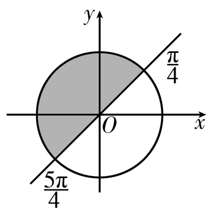

图1

例2 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图像如图2所示，则$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$的值为____。

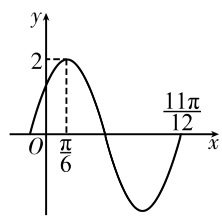

图2

解析：由图像可知$A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，所以$T=\pi$，所以$\omega=2$，因为当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数$f(x)$取得最大值，所以$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$。因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x\ \frac{\pi}{6}\right)$，则$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$。

题型二、平面向量的基本运算

例3 已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，则$|\overrightarrow{BD}|$的最大值为____。

解析：由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，可知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$。故以$B$为坐标原点，分别以$BA$，$BC$所在的直线为$x$轴，$y$轴建立平面直角坐标系（图略）。由题意得$B(0,0)$，$A(1,0)$，$C(0,2)$。设$D(x,y)$，则$\overrightarrow{AD}=(x-1,y)$，$\overrightarrow{DC}=(-x,2-y)$。由$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，可得$(x-1)(-x)+y(2-y)=0$，整理得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$。所以点$D$在以$E\left(\frac{1}{2},1\right)$为圆心，半径$r=\frac{\sqrt{5}}{2}$的圆上。因为$|\overrightarrow{BD}|$表示$B$，$D$两点间的距离，而$|\overrightarrow{EB}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$。所以$|\overrightarrow{BD}|$的最大值为$|\overrightarrow{EB}|+r=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$。

题型三、三角函数与平面向量“连理”篇

例4 （2017·江苏高考）已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$。

（1）若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求$x$的值；

（2）记$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求$f(x)$的最大值和最小值以及对应的$x$的值。

解：（1）因为$\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$-\sqrt{3}\cos x=3\sin x$。则$\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$。又$x\in[0,\pi]$，所以$x=\frac{5\pi}{6}$。

（2）$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos x,\sin x)\cdot(3,-\sqrt{3})=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$。

因为$x\in[0,\pi]$，所以$x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，从而$-1\leqslant\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$。于是，当$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即$x=0$时，$f(x)$取到最大值3。当$x+\frac{\pi}{6}=\pi$，即$x=\frac{5\pi}{6}$时，$f(x)$取到最小值$-2\sqrt{3}$。

作者单位：河南省鄢陵县第一高级中学