

求函数解析式的方法探究

■马向荣

在高中数学中,函数问题的正向思维是题目给出函数解析式,要求考生判断函数的定义域、值域、极值等,还有一种函数问题类型则是给出一定的限定条件要求逆向求出函数解析式,那么此时就需要利用以下方法进行思考了。

一、利用待定系数法求解析式

待定系数法是求函数解析式常用的方法之一,适用于已知或能确定函数的解析式的构成形式,如一次函数、二次函数、反比例函数、函数图像等,求函数解析式。其解法是根据条件写出它的一般表达式,然后由已知条件,主要通过系数的比较,列出等式,确定待定系数。

例 1 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 + bx + 1$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $4x - y - 12 = 0$, 则函数 $f(x) =$ _____。

解析: 因为 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2x + b$, 则由题意 $f'(1) = 4, f(1) = -8$, 则
$$\begin{cases} f(1) = b + 2 = -8, \\ f'(1) = a + b + 2 = 4, \end{cases}$$
 解得 $\begin{cases} a = 12, \\ b = -10, \end{cases}$ 所以 $f(x) = 12 \ln x + x^2 - 10x + 1$ 。

二、利用换元法(或配凑法)求解析式

已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式,要求 $f(x)$ 的解析式时,可考虑令 $g(x) = t$, 反解出 $x = h(t)$, 将其代入 $f[g(x)]$ 的表达式中,再用 x 替换 t 便可得到函数 $f(x)$ 的表达式;已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式,要求 $f(x)$ 的解析式时,若 $f[g(x)]$ 的表达式右边易配成 $g(x)$ 的运算形式,则可用配凑法,使用配凑法时要注意定义域的变化。

例 2 若 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____。

解析: 因为 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 。

三、利用函数性质求解析式

已知函数的某些性质(奇偶性、周期性、

对称性等),可利用这些性质求解。常常涉及两个转换过程:(1)自变量的转换,即将所求解析式的定义域范围转移到已知函数的定义域内;(2)函数名称的转换,如将 $f(-x)$ 转换为 $f(x)$ 、 $f(x+m)$ (m 为常数)转化为 $f(x)$ 等。

例 3 函数 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,满足 $f(3+x) = f(3-x)$, 当 $x \in (0, 3)$ 时, $f(x) = 2^x$, 则当 $x \in (-6, -3)$ 时, $f(x) =$ _____。

解析: 因为 $f(3+x) = f(3-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 3$ 对称,即 $f(x) = f(6-x)$ 成立。又 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x) = -f(-x) = -f(6+x)$ 。设 $x \in (-6, -3)$, 则 $x+6 \in (0, 3)$, 则 $f(x+6) = 2^{x+6}$, 所以 $f(x) = -f(6+x) = -2^{x+6}$, 即当 $x \in (-6, -3)$ 时, $f(x) = -2^{x+6}$ 。

四、根据图像确定解析式

根据给出函数的图像确定函数的解析式,主要有两种题型:(1)根据函数图像求函数的解析式,解答时常常根据图像特征及图像上的特殊点,求出具体的相关的量的值;(2)根据函数图像,同时给出了多个函数解析式,从中进行选择,解答时通常结合函数的性质,结合排除法进行解决。

例 4 函数 $f(x)$ 的部分图像如图 1 所示,则 $f(x)$ 的解析式可以是()。

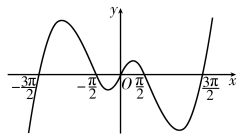


图 1

A. $f(x) = x + \sin x$

B. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

C. $f(x) = x \cos x$

D. $f(x) = x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

解析: 根据已知条件可知,函数 $f(x)$ 为奇函数,所以应排除 D。函数的图像过原点,所以应排除 B。图像过 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 所以排除 A。选 C。

作者单位:安徽省宿松县程集中学