

## 例析二次函数的最值问题

■马逸凡

求二次函数的最值必须认清定义域区间与对称轴的相对位置以及抛物线的开口方向(即二次函数中二次项系数的正负),然后借助于二次函数的图像或性质求解.因此,定义域、对称轴及二次项系数是求二次函数的最值的三要素.下面举例分析,供大家参考.

**例1** 已知函数  $f(x) = x^2 + 3x - 5, x \in [1, 2]$ , 求函数  $f(x)$  的最值.

**解:** 因为  $f(x) = x^2 + 3x - 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}$ , 所以  $f(x)$  的对称轴是  $x = -\frac{3}{2}$ .

因为  $x = -\frac{3}{2} \notin [1, 2]$ , 所以  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上为增函数, 所以  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上最大值是  $f(2) = 5$ , 最小值是  $f(1) = -1$ .

**评析:** 若对称轴不在该区间内, 则原函数在该区间内具有单调性, 所以, 在区间的两端点处分别取到两个最值.

**例2** 已知函数  $f(x) = x^2 + 3x - 5, x \in [-2, 1]$ , 求函数  $f(x)$  的最值.

**解:** 因为  $f(x)$  对称轴是  $x = -\frac{3}{2} \in [-2, 1]$ , 且抛物线开口向上, 所以  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$  上为增函数, 在区间  $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$  上为减函数, 所以  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最小值是  $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{29}{4}$ . 因为  $f(-2) = -7, f(1) = -1$ , 所以  $f(-2) < f(1)$ , 所以  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(1) = -1$ .

**评析:** 若对称轴在该区间内, 则原函数在顶点处取到其中一个最值, 另一最值在离对称轴较远的区间端点处取到.

**例3** 已知函数  $f(x) = x^2 + ax - 5, x \in [-2, 1]$ , 求函数  $f(x)$  的最值.

**解:**  $f(x)$  对称轴是  $x = -\frac{a}{2}$  且抛物线开口向上.

(1) 当  $-\frac{a}{2} \leq -2$ , 即  $a \geq 4$  时,  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上为增函数, 则函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(1) = a - 4$ , 最小值是  $f(-2) = -2a - 1$ ; (2) 当  $-\frac{a}{2} \geq 1$ , 即  $a \leq -2$  时,  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上为减函数, 则函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(-2) = -2a - 1$ , 最小值是  $f(1) = a - 4$ ; (3) 当  $-2 < -\frac{a}{2} < 1$ , 即  $-2 < a < 4$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最小值是  $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}a^2 - 5$ .

又  $f(-2) = -2a - 1, f(1) = a - 4$ , 则  $f(-2) - f(1) = 3(1 - a)$ .

① 当  $-2 < a \leq 1$  时,  $f(-2) \geq f(1)$ , 则  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(-2) = -2a - 1$ ; ② 当  $1 < a < 4$  时,  $f(-2) < f(1)$ , 则  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(1) = a - 4$ .

综上所述可得: (1) 当  $a \geq 4$  时,  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(1) = a - 4$ , 最小值是  $f(-2) = -2a - 1$ ; (2) 当  $a \leq -2$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(-2) = -2a - 1$ , 最小值是  $f(1) = a - 4$ ; (3) 当  $-2 < a \leq 1$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(-2) = -2a - 1$ , 最小值是  $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}a^2 - 5$ ; (4) 当  $1 < a < 4$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 1]$  上最大值是  $f(1) = a - 4$ , 最小值是  $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{4}a^2 - 5$ .

**评析:** 本题属于区间定而对称轴动, 应分情况讨论, 分类讨论时要做到“不重不漏”!

**作者单位:** 河南省确山县第一高级中学  
2017 级