灵活处理参变量，巧用线性规划思想

■毛蓉青

常规的线性规划题型是利用题中给出的二元一次的约束条件和目标函数，求目标函数的最值或者取值范围。但是高中数学的学习与初中数学的学习一个重要的区别是变量变多了，初中以前自己习惯于每一步都算出一个数字，心理才会踏实。如果算出一个字母，则内心的安全感就没有了，恐惧感上升。但是从高中起我们要学会与变量打交道，很多题目中会出现我们不太喜欢的变量，要学好高中数学就得好好地玩转变量。下面我就以几道数学题目为例谈谈我将多元、高次非线性约束条件和目标函数，进行灵活变形，转化为可以利用线性规划的一些做法供大家赏析。

例1　$y=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ 与 x 轴有交点，求 a^2+b^2 的取值范围？

解：这个题目简洁，但是变量却不少。首先我们将 $y=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ 与 x 轴有交点这个几何问题转换成代数式即：$0=x^4+ax^3+bx^2+ax+1\Rightarrow x^2\left(x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0$，因为 $x^2\neq0$，所以 $x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$，　(1)。

此处我们用改变主元法，将方程(1)视为以 a，b 为变量，x 为参数的直线。即 $a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0$。所以目标函数范围的求解可以理解为该直线到原点距离的范围。显然：$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\left|\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right|}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}}=\frac{\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right|}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1}}$，令 $t=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geqslant4$，$a^2+b^2\geqslant\left(\frac{t^2-2}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2$，　(2)。(2)式可视为($\sqrt{1+t^2}$，$t^2$)到(0，2)的斜率，根据线性规划的思想。令：$v=t^2\geqslant4$，$u=\sqrt{1+t^2}\geqslant\sqrt{5}$，$k=\frac{v-2}{u}\geqslant\frac{4-2}{\sqrt{5}}$。将(2)式通过经典的线性规划方法得到其答案。

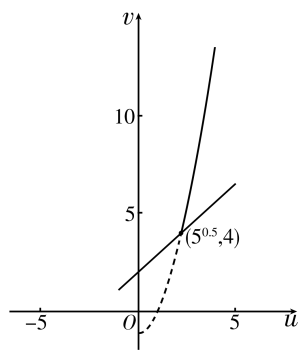

图1

所以 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{t^2-2}{\sqrt{1+t^2}}\geqslant\frac{4-2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $a^2+b^2\geqslant\frac{4}{5}$。

回顾问题的解决，第一个关键点是将条件方程的主元变换，如果按常规思想将 x 视为未知数将 a，b 视为参数(系数)那么问题将比较复杂是一个4次函数，如果我们避开这个难点将 x 视为参数(系数)将 a，b 视为未知数那么这个方程就变成了一个大家熟悉的二元一次线性方程；第二个关键点是将不能直接用线性规划的问题，借用线性规划的思想。把一个分式最值的求解问题转换为限定范围的抛物线上的点到原点的直线斜率。

例2　a^2-2b 满足什么条件，$y=x^2+ax+b$ 与 x 轴的交点分布在[0，1]？

解：$y=x^2+ax+b$ 与 x 轴的交点分布在[0，1]这个几何问题转换成代数式：$\Delta=b^2-4ac=a^2-4b>0$，　(1)，$0<x_{对称轴}=-\frac{a}{2}<1\Rightarrow-2<a<0$，　(2)，$f(0)\geqslant0\Rightarrow b\geqslant0$，　(3)，$f(1)\geqslant0\Rightarrow1+a+b\geqslant0$，　(4)，由(2)，(3)，(4)可得：$\begin{cases}b>0,\\0<a^2<4。\end{cases}$

以上是大家常见的处理一元二次不等式的方法，但是下面的步骤就与常规方法不同，如果按常规方法，我们是无法再利用线性规划的，因为目标函数不是一次，但是我们仔细

观察条件不等式和目标函数，会发现如果将 $a^2=t$ 等效为一个新的参量而不改变其限定的范围，则条件不等式和目标函数就都转换为线性规划的形式，从而使问题得到解决。

令 $a^2=t$，则原问题就转换为：已知 $t-4b>0$，$b>0$，$4>t>0$ 条件下，$t-2b$ 的范围。由常规线性规划的方法可以得到：$t-2b\in(0,4)$，如图 2。

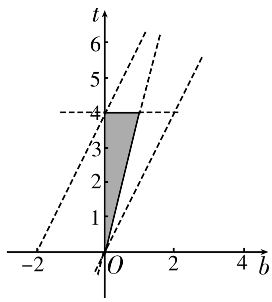

图 2

例 3 已知 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，求 $\dfrac{a}{b}$ 的范围。

解：由题目条件我们可以挖掘出 $c>0$ 的隐含条件，我们将已知不等式的两边同时除以 c，即将三个参变量的不等式转换成两个参变量的不等式。即 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，(1)，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，(2)。令 $\dfrac{b}{c}=x$，$\dfrac{a}{c}=y$。(1)(2) 可以转化成如下形式：$5-3y\leqslant x\leqslant 4-y$，(3)，$\ln x\geqslant y$，(4)。

通过除以 c 这个代数上的等效处理，将线性规划不能处理的(1)(2)问题转化为常见的线性规划问题(3)(4)。借用线性规划的思想：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{y}{x}$ 的范围可以转化为在不等式约束下的点与原点所连直线的斜率的范围。由经典解线性规划的方法可以得到 $\dfrac{a}{b}\in\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{8}\right)$。

由以上三个例题的求解过程，我们可以意识到：简单的线性规划蕴含着深刻的数形结合的思想，是我们处理复杂不等式问题的利器，我们要惯于和善于利用这种方法，为此我们要将多参变量减元，灵活地将参变量进行化简变换，使之能够利用线性规划，或类似线性规划来解题。

作者单位：四川省成都市高新区电子科技大学附属中学高二(1)班

（上接第 8 页）

例 4 正数 a、b、c、x、y、z 满足 $a+x=b+y=x+z=k$，求证：$ay+bz+cx<k^2$。

分析：本题由 $a+x=b+y=c+z=k$ 联想到构造三角形 $AB=BC=CA=k$，如图 5 所示，再由面积之间的关系可以证明。

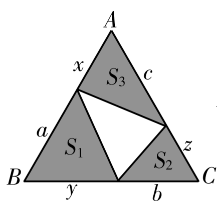

图 5

证明：如图 5，在边长为 k 的等边三角形 ABC 中，令 $AB=a+x$，$BC=y+b$，$CA=c+z$。

因为 $S_1+S_2+S_3<S_{\triangle ABC}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}ay+\dfrac{\sqrt{3}}{4}bz+\dfrac{\sqrt{3}}{4}cx<\dfrac{\sqrt{3}}{4}k^2$，所以 $ay+bz+cx<k^2$。

例 5 设 a,b,c 都是正实数，求证：

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-b|。$$

证明：$a=b$ 时，显然成立，由于 a,b 的地位相同，不妨假设 $a>b$，这时要证的不等式转化为 $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\leqslant a-b$。

如图 6 作 $\triangle ABC$，$CA=CB$，CD 为底边 AB 上的高，E 为 CD 上的一点，使得 $CD=a$，$ED=b$，$AD=DB=c$，由勾股定理得：$CA=CB=\sqrt{a^2+c^2}$，$EB=\sqrt{b^2+c^2}$。又 $CE=CD-ED=a-b$。在 $\triangle CBE$ 中，$CB-EB<CE$，即 $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}<a-b$。综上，命题得证。

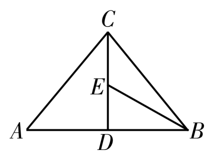

图 6

应用：已知 $0<a<1$，$0<b<1$，求证：

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-1)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$。

提示：构造图 7，不难得证。

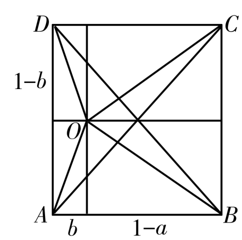

图 7

作者单位：江苏苏州市苏州湾实验初级中学