

高考圆锥曲线中对称型问题的解题研究

张馨雨

对称模型是数学中典型的几何模型,常见的点对称、轴对称经常出现在我们的习题中。在做2018年全国卷高考题时,我发现对称模型又出现在考题中,但表现方式变得更加隐蔽。下面结合两道经典的高考题,总结一下有关对称模型在高考中新的考查方式和简单的解题方法。

例1 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $K(-1, 0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D 。

证明: 点 F 在直线 BD 上。

分析: 题目如果直接设 AB 所在的直线方程, 再与抛物线联立求解, 计算量特别大。过点 K 直线与抛物线交点 A, B , 过点 F 的直线与抛物线交点 B, E , 若点 E 与点 A 的对称点 D 坐标相同, 则说明点 F 在直线 BD 上。通过同一法, 可以简洁地解答对称问题。

解析: 设直线 KB 的方程为 $x = my - 1$ ($m \neq 0$), 直线 FB 的方程为 $x = ny + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, 直线 FB 与抛物线的另一交点为 $E(x_3, y_3)$ 。

由 $\begin{cases} x = my - 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 4my + 4 = 0$, 所以 $y_1 y_2 = 4$ ①。

由 $\begin{cases} x = ny + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 4ny - 4 = 0$, 所以 $y_3 y_2 = -4$ ②。

对比①、②可得 $y_3 = -y_1$ 。结合抛物线的对称性可知, 点 E 与点 A 关于 x 轴对称, 故点 D 即点 E , 从而点 F, D, B 共线, 点 F 在直线 BD 上。

例2 (2018年新课标1卷)如图1, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$ 。

(1)略; (2)设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$ 。

分析: 若 $\angle OMA = \angle OMB$, 则过点 M

的直线 MA, MB 与椭圆的交点必对称。通过联立直线与椭圆方程, 运用韦达定理找到 A, B 坐标关系后, 再验证点 B 的对称点 B' 在直线 MA 上即可。

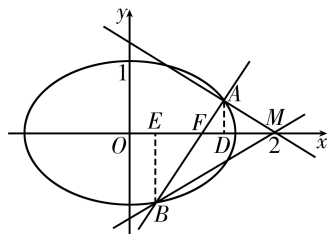


图1

解析: (2)当 l 与 x 轴重合时, $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$; 当 l 与 x 轴不重合时, 设 l 的方程为 $x = my + 1$ ($m \in \mathbf{R}$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。

由 $\begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$, 可知 $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}$ 。

因椭圆的对称轴也是 x 轴, $\angle OMA = \angle OMB$ 等价于点 B 关于 x 轴的对称点 $B'(x_2, -y_2)$ 在直线 AM 上, 要证明点 B' 在直线 $AM: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ 上, 只需证明:

$-y_2 = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x_2 - 2)$, 等价于 $x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2(y_1 + y_2) = 0$ 。

而 $x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2(y_1 + y_2) = (my_1 + 1)y_2 + (my_2 + 1)y_1 - 2(y_1 + y_2)$
 $= 2my_1 y_2 - (y_1 + y_2)$
 $= \frac{-2m + 2m}{m^2 + 2} = 0$ 。

所以 $\angle OMA = \angle OMB$ 。

通过上面两道典型高考题可以看出, 考题中都隐含着典型的对称模型, 但两题在处理方式上又有所不同。英国数学家怀特·海德说过: “数学是从模型化的个体作抽象的过程中对模式的研究”。平常学习中抓住典型的几何模型, 就可以抓住题目的本质, 迅速找到简洁的解法。

作者单位: 河北省石家庄市第24中学高二(1)班