均值不等式及其妙用

■周浩宇

证明不等式、求函数的最值、考察数列的收敛性等问题是高中数学的重要内容，这些问题可谓方法繁多，各得奇妙，其中均值不等式的应用往往以巧妙、简洁、事半功倍的特点为广大师生所喜爱。下面就均值不等式的基本用法举例说明。

一、几个重要的均值不等式

①$a^2+b^2\geqslant 2ab\Leftrightarrow ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$，当且仅当 $a=b$ 时，“$=$”号成立；

②$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b$ 时，“$=$”号成立；

③$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc\Leftrightarrow abc\leqslant\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$（$a$、$b$、$c\in\mathbf{R}^+$），当且仅当 $a=b=c$ 时，“$=$”号成立；

④$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$（$a$、$b$、$c\in\mathbf{R}^+$），当且仅当 $a=b=c$ 时，“$=$”号成立。

一、证明不等式

例1　证明【伯努利不等式（Bernoulli）】设 $\mu\in\mathbf{Q}^+$，$\mu<1$，则当 $x>-1$ 时，有 $(1+x)^\mu\leqslant 1+\mu x$。

证明：因 $\mu\in\mathbf{Q}^+$，$\mu<1$，故不妨令 $\mu=\frac{m}{n}$ $(m<n)$，其中 $m,n\in\mathbf{N}^+$。则

$$(1+x)^\mu=(1+x)^{\frac{m}{n}}$$
$$=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{m个}\underbrace{1,\cdots,1}_{n-m个}}$$
$$\leqslant\frac{m(1+x)+(n-m)\times 1}{n}$$
$$=1+\frac{m}{n}x=1+\mu x。$$

总结：均值不等式一般适用于带有开方的运算关系中，根据题目中的数据特征选取若干合适的正数来使用是解题的关键。

二、求函数的最值

例2　求下列函数的最大值：

(1) $y=x^2(3-2x)\left(0<x<\frac{3}{2}\right)$；

(2) $y=\sin^2 x\cos x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$。

解析：利用均值不等式求几个正数积的最大值，关键在于构造条件，使其和为常数。通常要通过乘以或除以常数、拆因式（常常是拆高次的式子）、平方等方式进行构造。

(1)因为 $0<x<\frac{3}{2}$，所以 $3-2x>0$，所以 $y=x^2(3-2x)\left(0<x<\frac{3}{2}\right)=x\cdot x\cdot(3-2x)\leqslant\left(\frac{x+x+(3-2x)}{3}\right)^3=1$，当且仅当 $x=3-2x$ 即 $x=1$ 时，“$=$”号成立，故此函数最大值是 1。

(2)因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin x>0$，$\cos x>0$，则 $y>0$，欲求 y 的最大值，可先求 y^2 的最大值。

$y^2=\sin^4 x\cdot\cos^2 x=\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{2}(\sin^2 x\cdot\sin^2 x\cdot 2\cos^2 x)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x+2\cos^2 x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$，当且仅当 $\sin^2 x=2\cos^2 x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\tan x=\sqrt{2}$，即 $x=\arctan\sqrt{2}$ 时，不等式中的“$=$”号成立，故此函数最大值是$\frac{2\sqrt{3}}{9}$。

注意：注意运用均值不等式求最值时的条件：一“正”、二“定”、三“等”。

作者单位：郑州四中高二(4)班