聚焦直线与方程中的对称问题

■余承洋

一、点关于点的对称问题

例1 已知 $P(1,2)$，$M(2,2)$，求点 P 关于点 M 的对称点的坐标。

解析：设点 P 关于点 M 的对称点为 $Q(x,y)$，则 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=2,\\ \dfrac{2+y}{2}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\ y=2。\end{cases}$ 所以点 P 关于点 M 的对称点为 $Q(3,2)$。

评析：点与点的对称实质上是中点公式的应用，点 $P(x_0,y_0)$ 关于点 $M(a,b)$ 的对称点为 $Q(2a-x_0,2b-y_0)$。

二、直线关于点的对称问题

例2 求直线 l_1：$x+2y+4=0$ 关于点 $M(1,2)$ 对称的直线 l_2 的方程。

解法1：设直线 l_2 的方程为 $x+2y+c=0$，因为 $\dfrac{|1+2\times2+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|1+2\times2+c|}{\sqrt{1^2+2^2}}$，所以 $c=4$ 或 -14，所以直线 l_2 的方程为 $x+2y-14=0$。

解法2：设点 $P(x,y)$ 是直线 l_2 上任意一点，则点 P 关于点 M 的对称点为 $Q(2-x,4-y)$，因为 Q 在直线 l_1 上，所以 $2-x+2(4-y)+4=0$，即直线 l_2 的方程是 $x+2y-14=0$。

评析：上述两种方法是一般解法，另外对于特征直线有以下两个结论：点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=x+b$ 的对称点为 $Q(y_0-b,x_0+b)$，点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x+b$ 的对称点为 $Q(b-y_0,b-x_0)$。

三、点关于直线的对称问题

例3 光线由点 $A(-1,2)$ 射入，在直线 l：$x+2y-2=0$ 上反射，已知反射光线过点 $B(3,1)$，求反射光线所在的直线方程。

解析：设点 A 关于直线 l 的对称点 C 为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}\dfrac{y_0-2}{x_0+1}=2,\\ \dfrac{x_0-1}{2}+2\times\dfrac{y_0+2}{2}-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-\dfrac{7}{5},\\ y_0=\dfrac{6}{5},\end{cases}$ 即点 C 为 $\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{6}{5}\right)$。所以反射光线 BC 的方程为 $y-1=\dfrac{\dfrac{6}{5}-1}{-\dfrac{7}{5}-3}(x-3)$，即 $x+22y-25=0$。

评析：点 $P(x_1,y_1)$，点 $Q(x_2,y_2)$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 对称，主要利用垂直、平分这两个条件，得到的关系式如下：

$$\begin{cases}\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{B}{A}(A\neq0),\\ A\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+B\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}+C=0。\end{cases}$$

四、直线关于直线对称的问题

例4 求直线 l_1：$2x+y-4=0$ 关于直线 l：$3x+4y-1=0$ 对称的直线 l_2 的方程。

解析：由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\ 3x+4y-1=0,\end{cases}$ 可得 l_1 与 l 的交点为 $A(3,-2)$。在 l_1 上取一点 $P(2,0)$，设 P 关于 l 的对称点 Q 为 (a,b)。

则 $\begin{cases}\dfrac{b}{a-2}=\dfrac{4}{3},\\ 3\times\dfrac{a+2}{2}+4\times\dfrac{b}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{5},\\ b=-\dfrac{8}{5},\end{cases}$ 所以点 Q 为 $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$。

故直线 l_2 的方程即直线 AQ 的方程为 $y+2=\dfrac{-\dfrac{8}{5}-(-2)}{\dfrac{4}{5}-3}(x-3)$，即 $2x+11y+16=0$。

评析：直线关于直线对称有两个要素，一个交点和任意一个点的对称点。直线 l_2 由两点确定，一是 l_1 与 l 的交点，二是通过 l_1 上任取一点 P 关于直线 l 的对称点 Q。

作者单位：河南省驻马店高级中学